المحاضرة النظرية الخامسة ٤٤٤

ملاحظة عن التوابع الكسرية:

إذا كان التكامل بالشكل

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \Delta<0 \text{ أو } \Delta\geq 0 \text{ حيث}$$

كثير حدود درجة ثانية (نوجد الشكل الأول بوجود a مضروب بـ x^2 وهو عدد ثابت نخرجه خارج التكامل)

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

الخطوة الثانية نتمم إلى مربع كامل أول حدين

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}$$

k^2

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2 \mp k^2}$$

نفرض ما داخل التربيع $= t \Leftarrow x+\frac{b}{2a}=t$

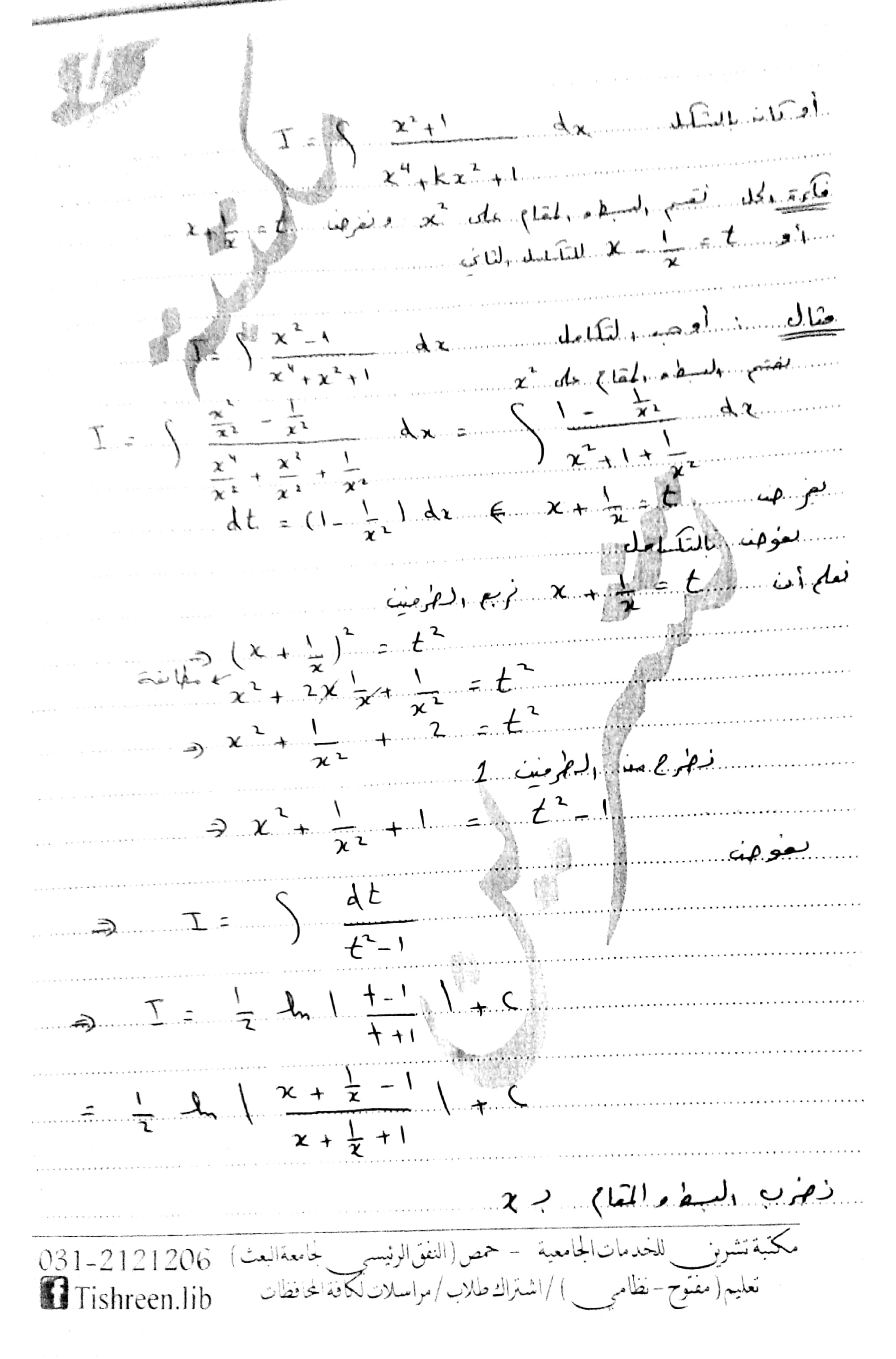
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2 \mp k^2}$$

إذا كان $\int \frac{dx}{t^2+k} = \frac{1}{k} \arctan \frac{t}{k}$

$$\int \frac{dx}{t^2-k^2} = \frac{1}{2k} \ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + c$$

حالة خاصة لتكاملات التوابع الكسرية:

إذا كان التكامل بالشكل $I = \int \frac{x^2-1}{x^4+kx^2+1}\,dx$



أما كان بالشكل $I = \int \frac{x^2+1}{x^4+kx^2+1}\,dx$

فكرة الحل: نقسم البسط والمقام على x^2 ونفرض $x+\frac{1}{x}=t$

أو $x-\frac{1}{x}=t$ للتكامل الثاني

مثال: أوجد التكامل

$$I = \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$$

نقسم البسط والمقام على x^2

$$I = \int \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^4}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

نفرض $x+\frac{1}{x}=t \Leftarrow dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

نعوض بالتكامل

نعلم أن $x+\frac{1}{x}=t$ نربع الطرفين

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$$

بالمطابقة

$$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2$$

نطرح من الطرفين 1

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+1=t^2-1$$

نعوض

$$\Rightarrow I=\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+c$$

نضرب البسط والمقام بـ x

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + c$$

التكاملات الصماء (أي تكاملات توابع تحوي على جذور)

سنتعرف على طرق تكامل التوابع التي تحوي في سطرها أو مقامها توابع جذرية وتحولها إلى تكاملات سابقة
سنميز الحالات التالية

ح1:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x+\beta}}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$I = \int \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta}}{(\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x+\beta})(\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta})} dx$$

نلاحظ أن المقام هو عبارة عن مطابقة تربيعية من الشكل
$\{ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta}}{(x+\alpha)-(x+\beta)} dx = \int \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta}}{x+\alpha-x-\beta} dx$$

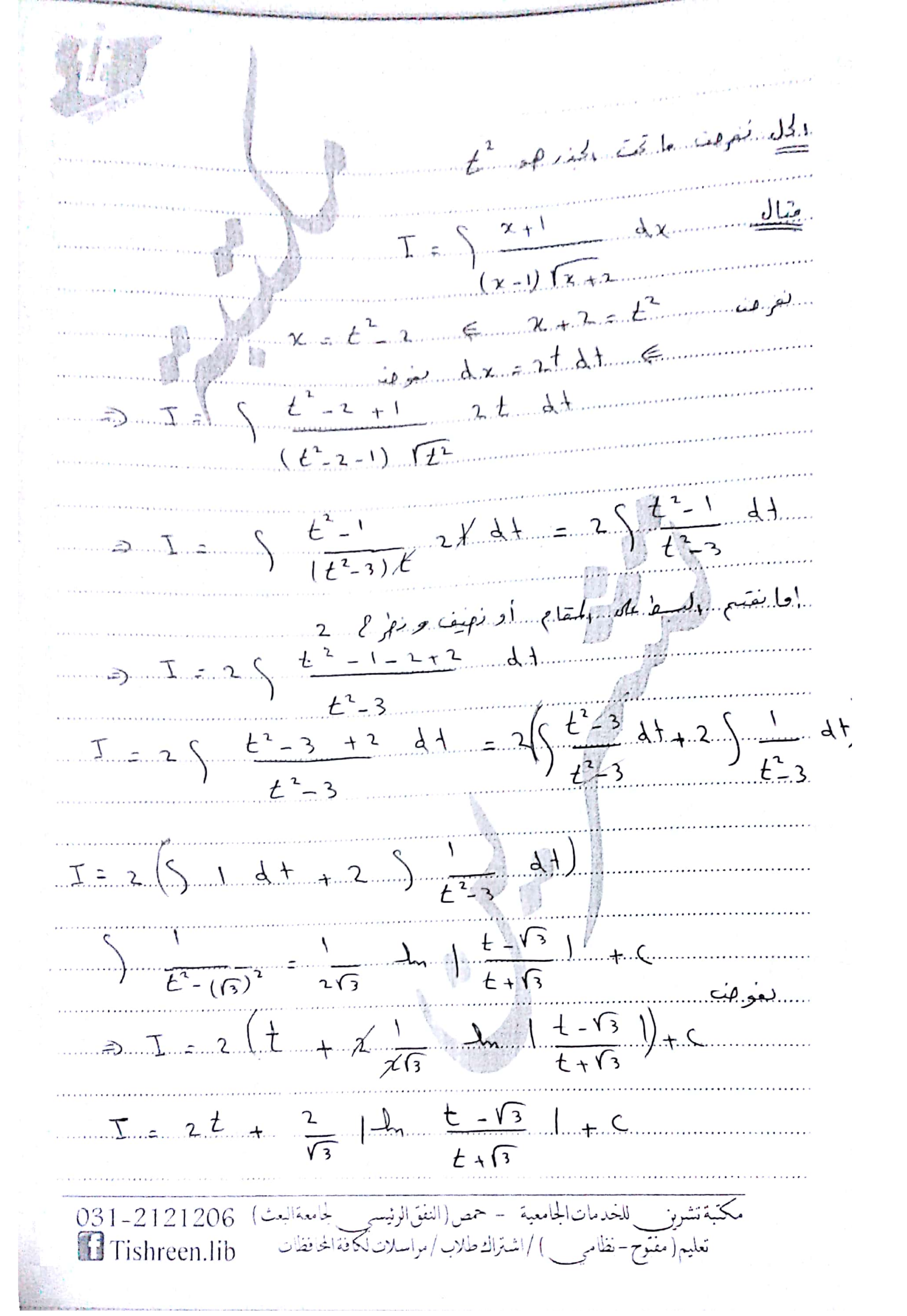
$$I = \int \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta}}{\alpha - \beta} dx = \frac{1}{\alpha-\beta} \int (\sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x+\beta}) dx$$

ح2

$$I = \int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$$

أو

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{Ax+B}}$$



الحل: نفرض ما تحت الجذر هو t^2

مثال

$$I=\int \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x+2}}\,dx$$

نفرض $x+2=t^2 \Leftarrow x=t^2-2$

$\Leftarrow dx=2t\,dt$ نعوض

$$\Rightarrow I=\int \frac{t^2-2+1}{(t^2-2-1)\sqrt{t^2}}\,2t\,dt$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{t^2-1}{(t^2-3)t}\,2t\,dt=2\int \frac{t^2-1}{t^2-3}\,dt$$

إما نقسم البسط على المقام أو نضيف ونطرح 2

$$\Rightarrow I=2\int \frac{t^2-1-2+2}{t^2-3}\,dt$$

$$I=2\int \frac{t^2-3+2}{t^2-3}\,dt=2\left(\int \frac{t^2-3}{t^2-3}\,dt+2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt\right)$$

$$I=2\left(\int 1\,dt+2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt\right)$$

$$\int \frac{1}{t^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+c$$

نعوض

$$\Rightarrow I=2\left(t+2\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)+c$$

$$I=2t+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+c$$

$$\Rightarrow I = 2\sqrt{x+2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} \right| + c$$

3) التكامل من الشكل

$$I = \int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}$$

لدينا كثير حدود درجة أولى مضروب بجذر كثير حدود درجة ثانية

حيث $a>0$ أو $a<0$

$a \neq 0$

فكرة الحل أن نجعل $px+q$ مشتق لما داخل الجذر

للتوضيح

$$px+q = (2ax+b)$$

نقسم على $2a$ ونطرح b

$$px+q = \frac{p}{2a}(2ax+b) - \frac{pb}{2a} + q$$

مثال

$$I = \int (3x-2)\sqrt{x^2+x+1}\, dx$$

نلاحظ أن

$$(x^2+x+1)' = 2x+1$$

نجعل $3x-2$ مشتق لما داخل الجذر

لنكتب

$$3x-2 = \frac{3}{2}(2x+1) - \frac{3}{2} - 2$$

$$= \frac{3}{2}(2x+1) - \frac{7}{2}$$

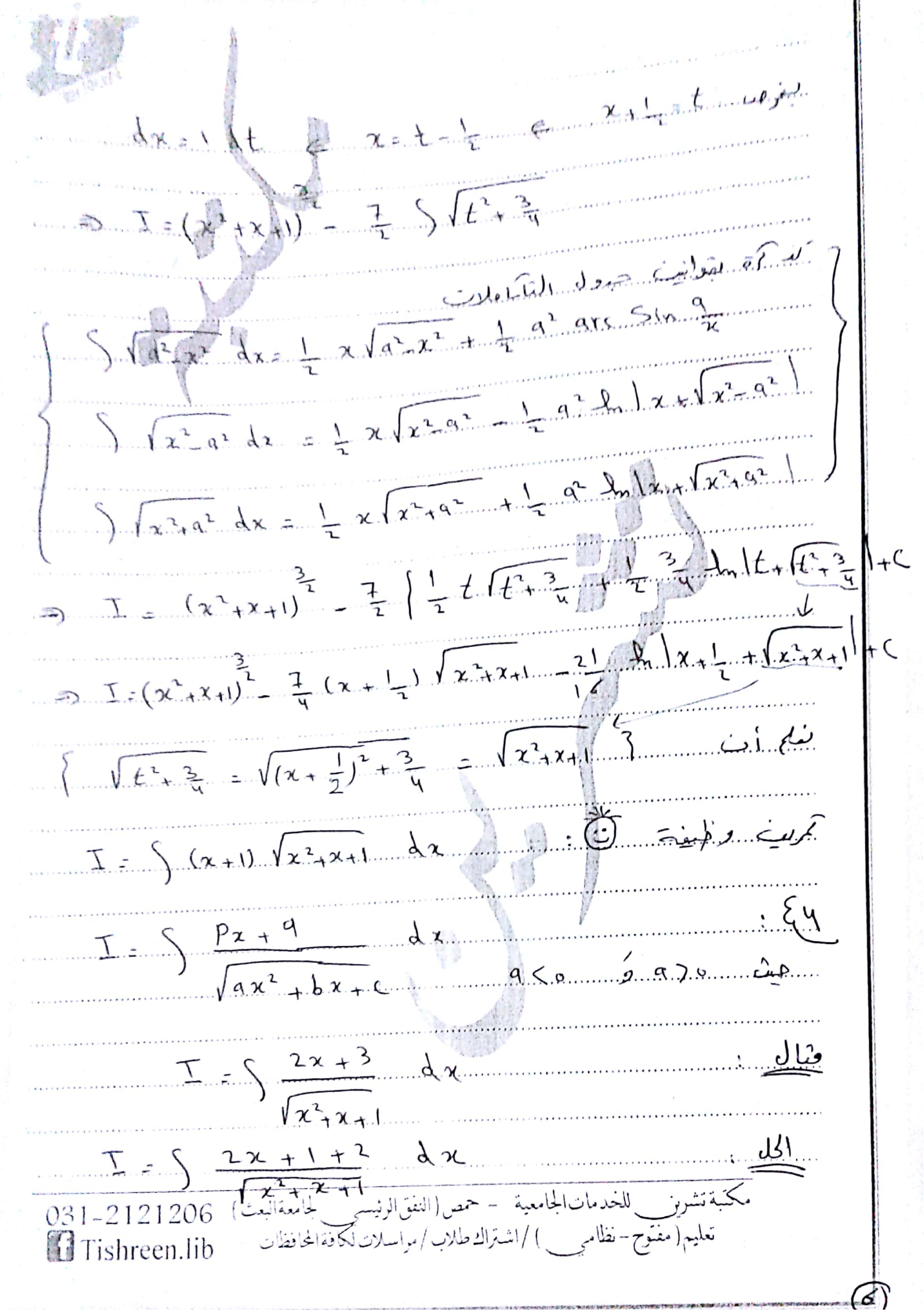
$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\, dx - \frac{7}{2}\int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\frac{(x^2+x+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\int \sqrt{x^2+x+1}$$

نتمم إلى مربع كامل

$$\Rightarrow I = (x^2+x+1)^{3/2} - \frac{7}{2}\int \sqrt{\underbrace{x^2+x+\tfrac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2} - \tfrac{1}{4} + 1}\, dx$$

$$\Rightarrow I = (x^2+x+1)^{3/2} - \frac{7}{2}\int \sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}}\, dx$$



نفرض $x+\frac{1}{2}=t$ ⇐ $x=t-\frac{1}{2}$ ⇐ $dx=dt$

$$\Rightarrow I=(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{2}\int\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}$$

للتذكرة بقوانين جدول التكاملات

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{a}{x}$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\Rightarrow I=(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{2}\left\{\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|\right\}+C$$

$$\Rightarrow I=(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{7}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{21}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$$

نعلم أن: $\left\{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{x^2+x+1}\right\}$

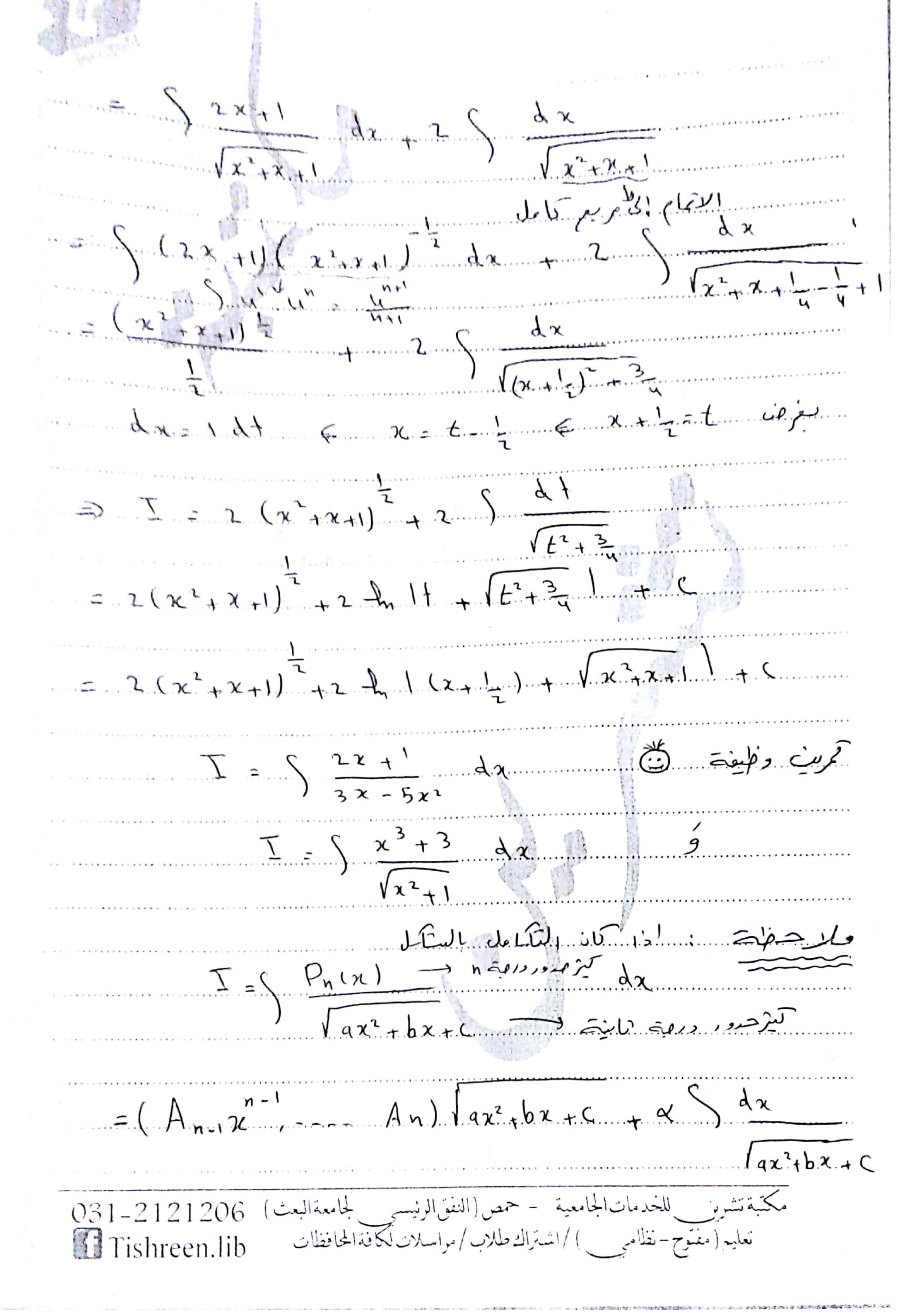
تمرين وظيفة: $I=\int(x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

٤) : $I=\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

حيث $a>0$ أو $a<0$

مثال: $I=\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

الحل: $I=\int\frac{2x+1+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$



$$= \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

الاتمام إلى مربع كامل

$$= \int (2x+1)(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}}$$

$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

بفرض $x+\frac{1}{2}=t \Leftarrow x = t-\frac{1}{2} \Leftarrow dx = 1\,dt$

$$\Rightarrow I = 2(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= 2(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right| + c$$

$$= 2(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} + 2\ln\left|(x+\frac{1}{2})+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c$$

تمرين وظيفة ☺

$$I = \int \frac{2x+1}{3x-5x^2}\,dx$$

و

$$I = \int \frac{x^3+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

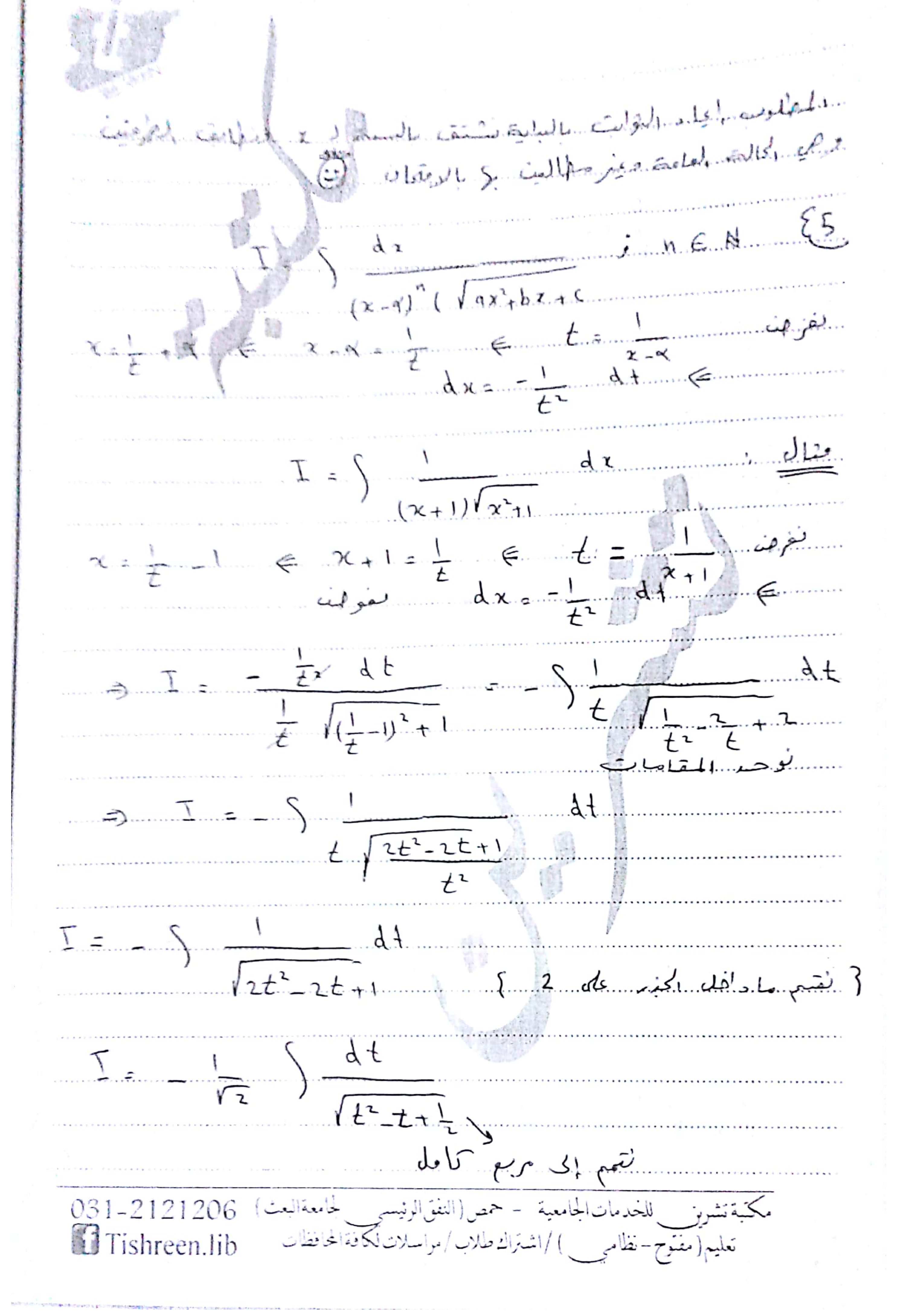
ملاحظة: إذا كان التكامل بالشكل

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$P_n(x) \rightarrow$ كثير حدود درجة n

$\sqrt{ax^2+bx+c} \rightarrow$ كثير حدود درجة ثانية

$$= (A_{n-1}x^{n-1}, ---- A_n)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$



المطلوب إيجاد الثوابت بالبداية نشتق بالنسبة لـ x الطرفين
وهي الحالة العامة مميزة بالمثال في بالامتحان ☺

ح5 $I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$; $n \in N$

نفرض $t = \frac{1}{x-\alpha} \Rightarrow x - \alpha = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} + \alpha$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$

<u>مثال</u>: $I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx$

نفرض $t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$ نعوض

$\Rightarrow I = \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+1}} = -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}} dt$

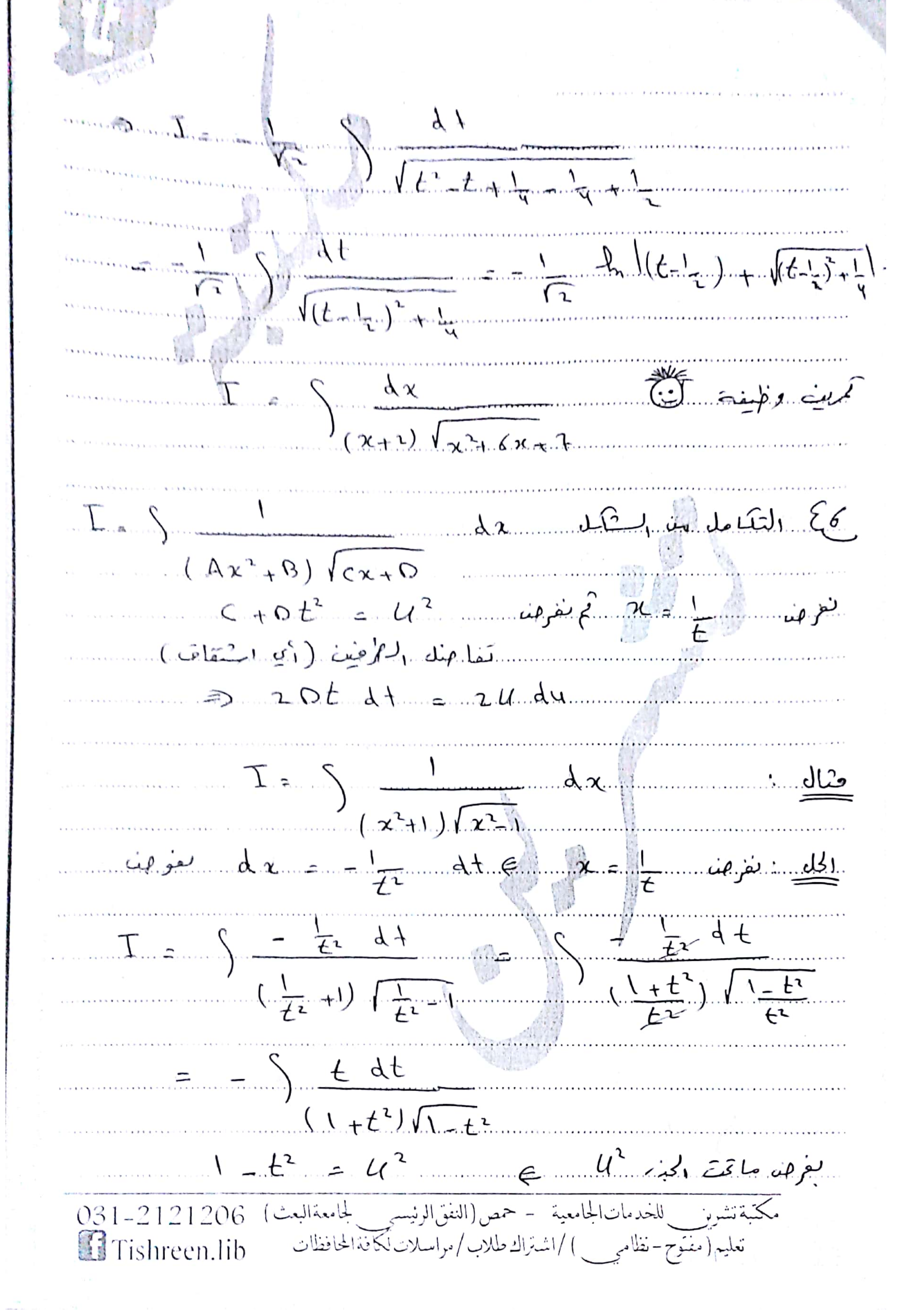
نوحد المقامات

$\Rightarrow I = -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{2t^2-2t+1}{t^2}}} dt$

$I = -\int \frac{1}{\sqrt{2t^2-2t+1}} dt$ { نقسم ما داخل الجذر على 2 }

$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}}$ ↘

نتمم إلى مربع كامل



$$\Rightarrow I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|(t-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{(t-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}}\right|$$

تمرين وظيفة 🙂 $I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+6x+7}}$

6) التكامل من الشكل $I = \int \frac{1}{(Ax^2+B)\sqrt{Cx+D}}\,dx$

نفرض $x = \frac{1}{t}$ ثم نفرض $C + Dt^2 = u^2$

تفاضل الطرفين (أي اشتقاق)

$\Rightarrow 2Dt\,dt = 2u\,du$

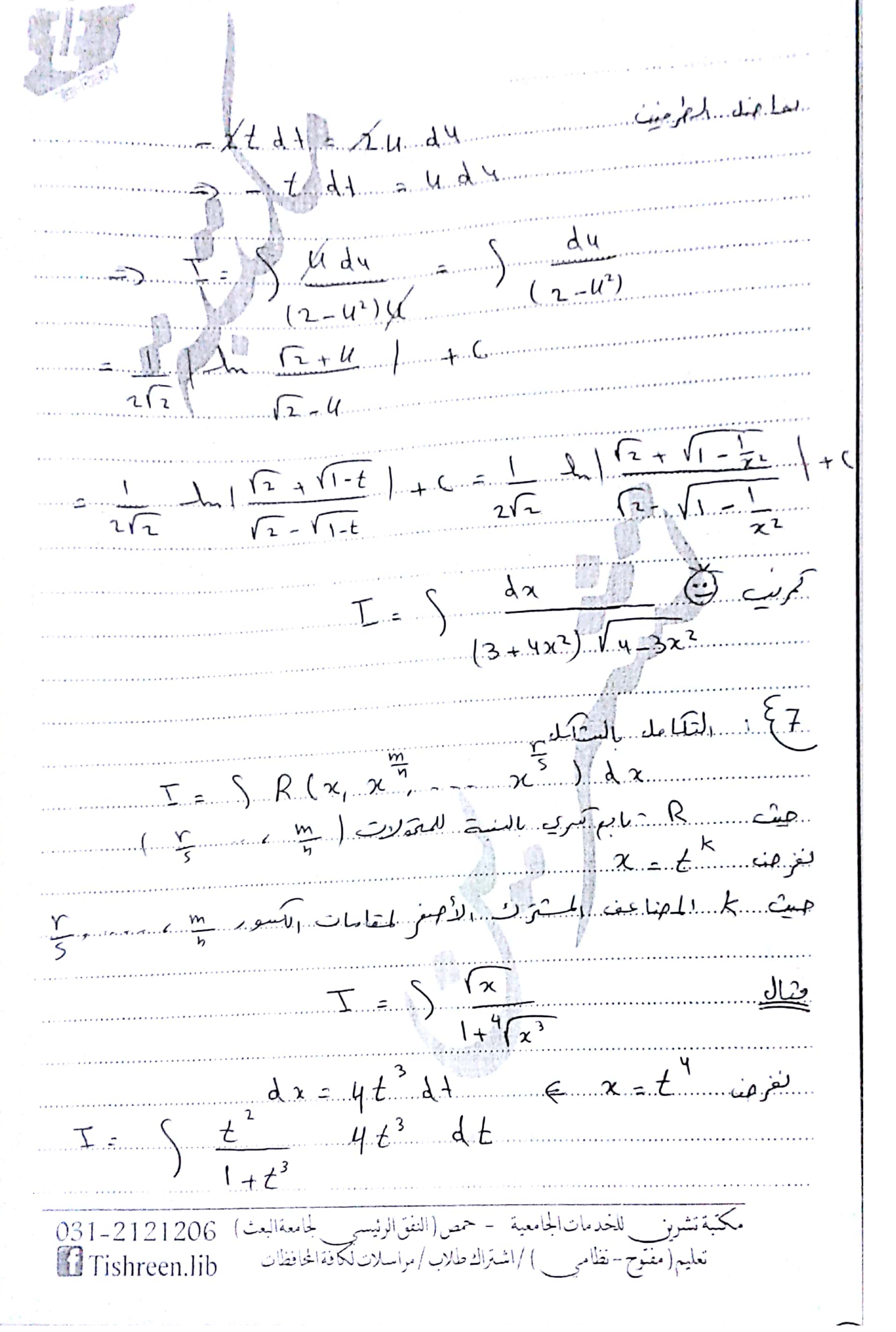
مثال: $I = \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$

الحل: نفرض $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$ نعوض

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{(\frac{1}{t^2}+1)\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{(\frac{1+t^2}{t^2})\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

نفرض ما تحت الجذر $u^2 \Rightarrow 1 - t^2 = u^2$



بمفاضلة الطرفين

$$-2t\,dt = 2u\,du$$

$$\Rightarrow -t\,dt = u\,du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{u\,du}{(2-u^2)u} = \int \frac{du}{(2-u^2)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right| + c$$

تمرين

$$I = \int \frac{dx}{(3+4x^2)\sqrt{4-3x^2}}$$

7) : التكامل بالشكل

$$I = \int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})\,dx$$

حيث R تابع كسري بالنسبة للمتحولات $(\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s})$

لنفرض $x = t^k$

حيث k المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$

مثال

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}$$

لنفرض $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt$

$$I = \int \frac{t^2}{1+t^3}\, 4t^3\, dt$$

$$I = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}\,dt$$

نقسم البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} & t^2 \\ t^3+1 & t^5 \\ & \mp t^5 \mp t^2 \\ \hline & -t^2 \end{array}$$

$$I = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right)dt$$

نضرب ونقسم على 3

$$= 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\ln|1+t^3|\right) + c$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\ln|x^{\frac{3}{4}}+1| + c$$

تمرين وظيفة ☹

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

8) : التكامل الشكل

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

نفرض $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

حيث k المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور

مثال :

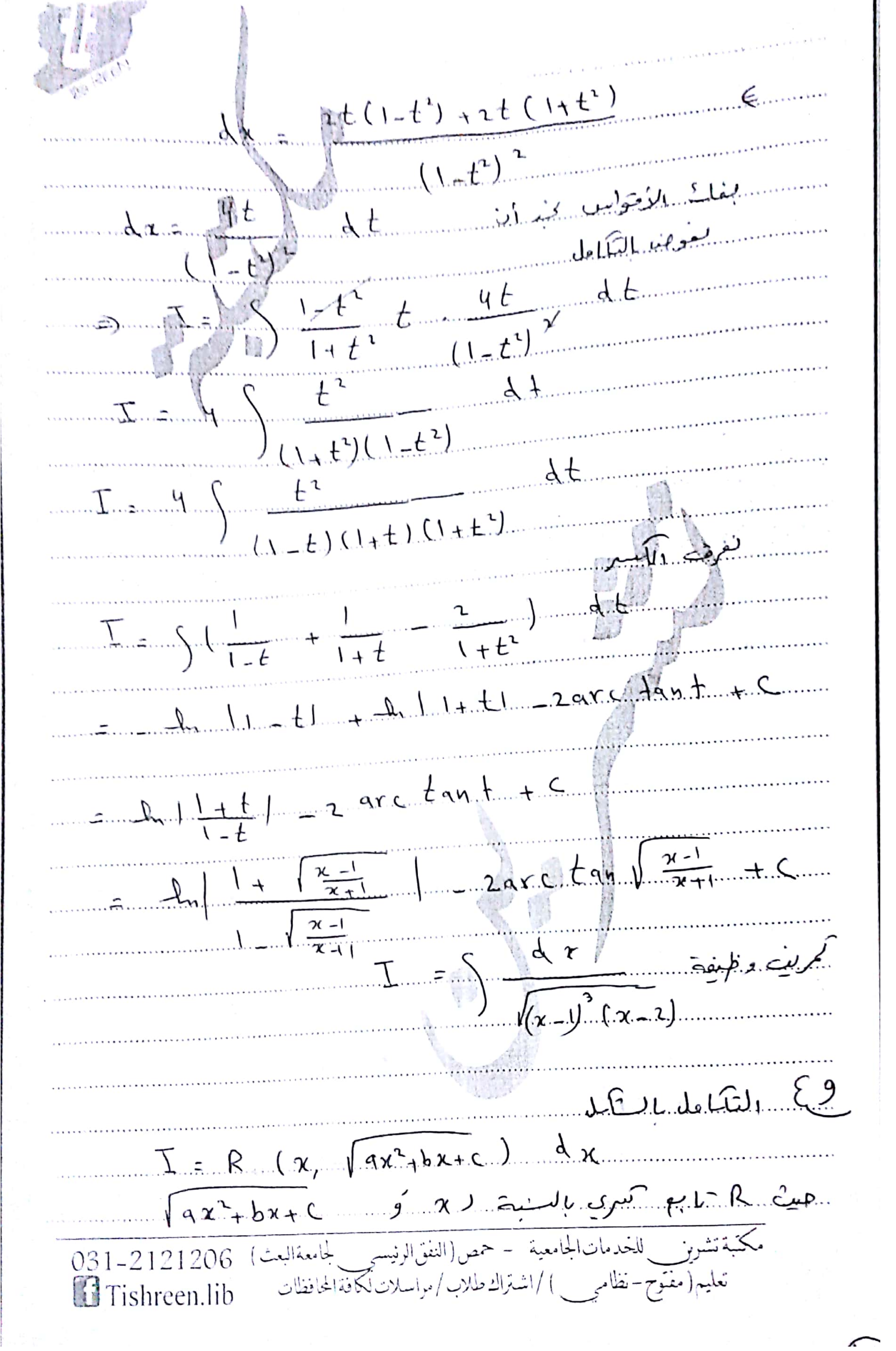
$$I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

نفرض $\frac{x-1}{x+1} = t^2$

$$\Rightarrow x - 1 = xt^2 + t^2$$

$$x - xt^2 = t^2 + 1 \Rightarrow x(1-t^2) = 1+t^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$



ع

$$dx = \frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$$

بفك الأقواس نجد أن

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt$$

نعوض في التكامل

$$\Rightarrow I = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt$$

$$I = 4\int \frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\, dt$$

$$I = 4\int \frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}\, dt$$

نفرق الكسر

$$I = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\right) dt$$

$$= -\ln|1-t| + \ln|1+t| - 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

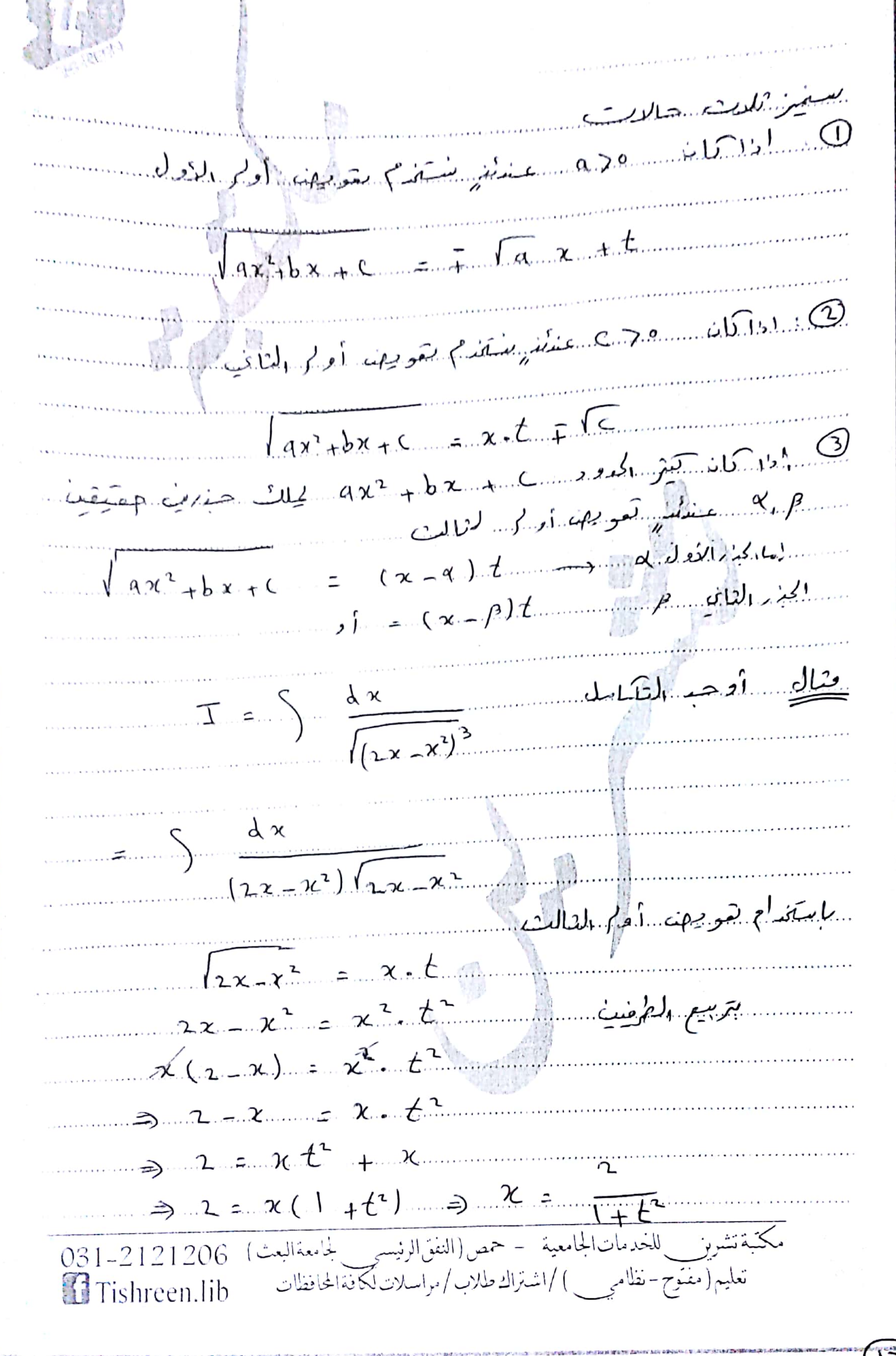
تمرين وظيفة

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$$

9) التكامل بالشكل

$$I = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

حيث R تابع كسري بالنسبة لـ x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$



يميز ثلاث حالات

① اذا كان $a>0$ عندئذ نستخدم تعويض أولر الأول

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \mp\sqrt{a}\,x + t$$

② اذا كان $c>0$ عندئذ نستخدم تعويض أولر الثاني

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\cdot t \mp \sqrt{c}$$

③ اذا كان كثير الحدود ax^2+bx+c يملك جذرين حقيقيين α,β عندئذ تعويض أولر الثالث

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$$ إما الجذر الأول α

أو $= (x-\beta)\,t$ الجذر الثاني β

مثال: أوجد التكامل

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$$

$$= \int \frac{dx}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

باستخدام تعويض أولر الثالث

$$\sqrt{2x-x^2} = x\cdot t$$

بتربيع الطرفين

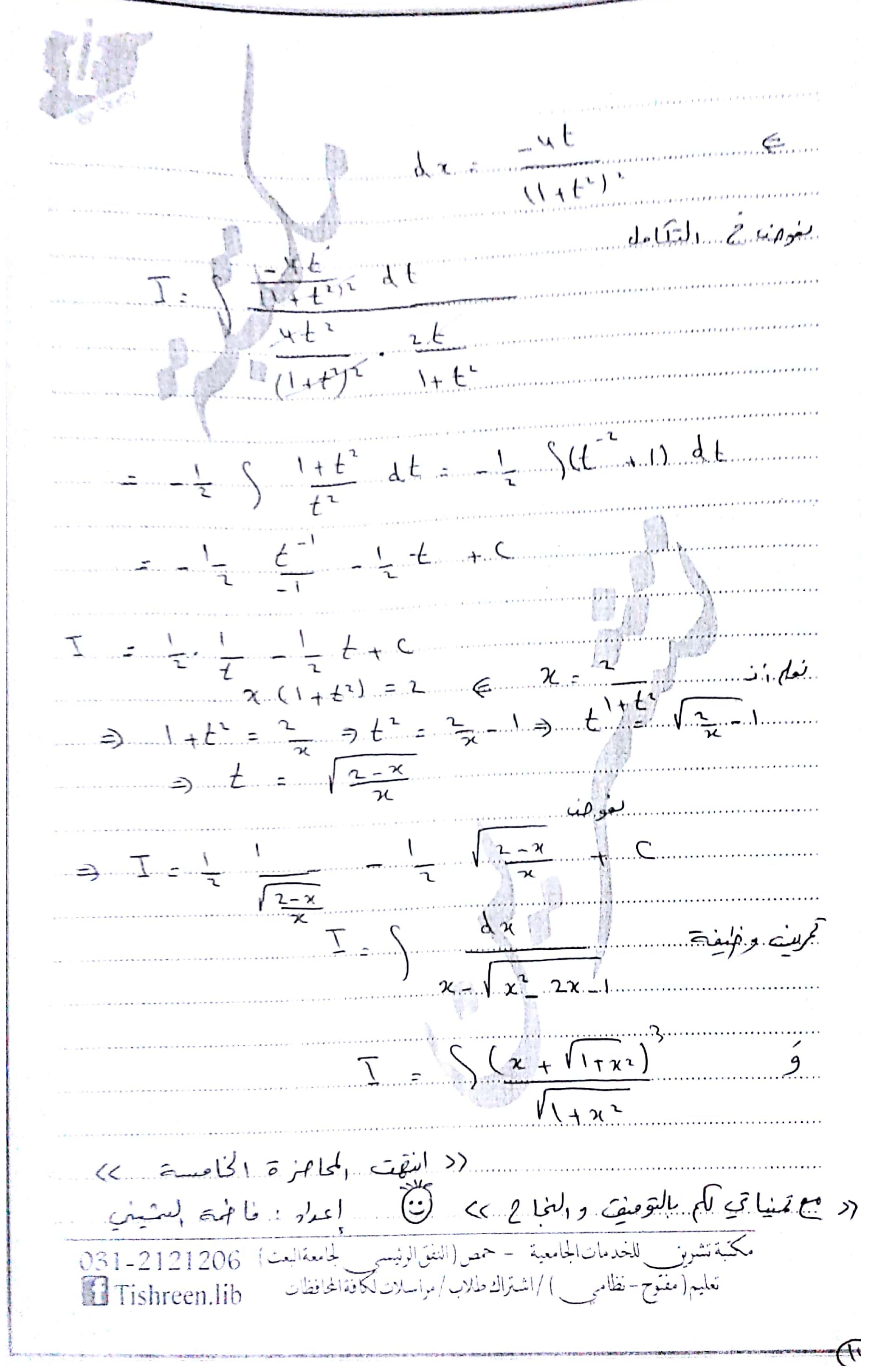
$$2x-x^2 = x^2\cdot t^2$$

$$x(2-x) = x^2\cdot t^2$$

$$\Rightarrow 2-x = x\cdot t^2$$

$$\Rightarrow 2 = xt^2 + x$$

$$\Rightarrow 2 = x(1+t^2) \Rightarrow x = \frac{2}{1+t^2}$$



$\Leftarrow \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

بتعويض التكامل

$$I = \int \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt}{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int (t^{-2}+1)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}t + C$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + C$$

نعلم أن $x = \frac{2}{1+t^2} \Leftarrow x(1+t^2) = 2$

$$\Rightarrow 1+t^2 = \frac{2}{x} \Rightarrow t^2 = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{x} - 1}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

نعوض

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{x}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x}} + C$$

تمرين وظيفة

$$I = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 2x - 1}}$$

و

$$I = \int \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

<< انتهت المحاضرة الخامسة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >> ☺ إعداد: فاطمة الحسيني